2013年第六届丘成桐中学数学奖
广东广雅中学参赛论文

700阶以内有限群单性的探究

参赛队员 邵芷茵 谢瑞恒 赵子琪

指导老师 徐敏

参赛学校 广东广雅中学

省份 广东省

700阶以内有限群单性的探究

【摘要】

众所周知，群是带有一个代数运算的的特殊集合，常用字母G来表示.若群G的一个子集H在这个代数运算下仍然构成一个群，则称H是G的子群，并记作$H \le G$.此外，若子群H还满足条件：

$$gHg^{-1} = H, \forall g \in G$$

则称H是G的正规子群，并记作$H \lhd G$. 根据正规子群的定义易知，任何一个群G都有两个平凡的正规子群：$\{e\}$和G.只有这两个平凡正规子群的有限群称为有限单群.有限单群在群中的作用类似于数论中的素数，具有十分重要的作用.正因如此，有限单群分类问题成为了 20 世纪代数学的中心问题，在经历 150 年、数百位数学家的不懈努力后，终于在 1981 年得到解决.本文利用$Sylow$定理、Burnside 定理和群作用等初等群论方法，得出了一系列判断群单群的条件，并利用这些结论对 700 阶以内的有限单群的情况作出了讨论. 推广了文献[1]，[2]，[3]，[4]中的结果，得出结论：

定理 在阶数≤ 700的有限群中，除去$|G| \in \{2,60,168,360,504,660\}$外，均不可能为单群.

【关键词】

有限群 子群 正规子群 单群 $Sylow$子群 $Sylow$定理 群作用 正规化子 中心化子 传递置换表示 N/C定理

Research on simple groups of order less or equal than 700

【ABSTRACT】

It is known to all that group is a set with an algebra operation, which is often denoted by G . We call a subset H of G subgroup if H also forms a group under the same algebra operation, denoted by $H \le G$. Besides, if the subgroup H satisfies the condition

$$gHg^{-1} = H, \forall g \in G$$

Then H is a normal subgroup of G, written $H \lhd G$. According to the definition of the normal subgroup, $\{e\}$ and G are trivial normal subgroups of any group G . A simple group is the group which has only the 2 trivial normal subgroups. The importance of the simple groups may analogue to the prime numbers in the number theory. The classification of the finite simple groups was the central problem of 20th century's' algebra, which was finally solved at 1981 by hundreds of mathematicians within a 150 period. In this research report, we use *Sylow* theorem, *Burnside* theorem ,group action and some other elementally group theory methods to conclude some criteria of simple group . By using these criteria we determine the possible simple groups whose order less than 500. Generalizes the results in the reference [1]， [2]， [3]， [4].We conclude that

Theorem A group G of order less or equal than 700 could not be simple except for

$$|G| \in \{2, 60, 168, 360, 504, 660\}$$

【KEYWORDS】

finite group　subgroup　normal subgroup　simple group　*Sylow* theorem　group action　normalizer　centralizer　transitive permutation presentation　N/C theorem

第 1 章　绪论

§ 1.1 本文的研究背景

群是现代数学最基本和最重要的概念之一，它在数学本身及现代科学技术的很多方面都有广泛的应用[5]. 群论的研究起源于十八世纪末，数学家 Galois (1811~1832) 在解决“5 次代数方程能否用根式求解”的过程中，就创造了“群”、“域”这样的代数体系.而有限群则是群论中运用最为广泛、研究最多、涉及面最广的一个研究领域. 其中，有限单群分类定理则是有限群理论的中心问题，证明该定理前后历时 150 多年，参加其中的数学家多达几百人，最终于 1981 年获得完整证明：有限单群共有 18 个无限族和不在这 18 个族中的 26 个零散单群.在证明有限单群分类定理的过程中，采用了许多复杂的方法，如抽象群论、表示论、几何及组合图论中的方法. 本文采用了 Sylow 定理、Burnside 定理和群作用等初等群论方法，对 700 阶以内的有限单群的情况作出了讨论. 指明了所有可能的单群，并给出具体的例子.

§ 1.2 本文的主要结构

第 1 章 绪论

介绍了本文的研究背景和内容.

第 2 章 主要结果

这是本文的主要部分.首先介绍了有限群论中经常要用到的定义和定理，有限群理论的特点是条件灵活，推导过程极富技巧性，在对群阶数逐一验证的过程中，大量使用到了 *Sylow* 定理、Burnside 定理和群作用. 得出最主要的结果：

定理　在阶数 ≤ 700 的有限群中，除去 $|G| \in \{2,60,168,360,504,660\}$ 外，均不可能为单群.

第 3 章 本文的结束语和有待研究的问题

最后是参考文献和附录.

第 2 章　主要结果

§ 2.1 基本概念和引理

定义 2.1　在非空集合 G 中定义一个二元运算 $\circ$. 若满足以下条件：
(1) $(a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c)\ \forall a,b,c\in G$；
(2) $\forall a\in G, \exists e\in G$，使得 $a\circ e = e\circ a = a$；
(3) $\forall a\in G, \exists b\in G$，使得 $a\circ b = b\circ a = e$.
则称 $(G,\circ)$ 是一个群，或简记为 G. 其中 e 称为单位元，满足 $a\circ b = b\circ a = e$ 的元素 b 称为 a 的逆元，记作 a^{-1}. 群 G 的元素个数称为群 G 的阶，记作 $|G|$. 当 $|G|<\infty$ 时，称为有限群，否则称为无限群，本文中如不做特殊说明，均为有限群. 在不引起混淆的情况下，运算符号“$\circ$”经常略去不写.

定义 2.2　若群 G 的乘法满足交换律，即

$$ab = ba,\ \forall a,b\in G$$

则称为交换群或 Abel 群.

定义 2.3　对于 $a\in G$，$n\in \mathrm{N}_+$，规定：

$$a^n = \underbrace{a\circ a\circ\cdots\circ a}_{n}，\ a^0 = e，\ a^{-n} = \left(a^n\right)^{-1}$$

在这种记号下，对于 $m,n\in \mathrm{Z}$，显然有

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

如果 G 是交换群，则还有 $(ab)^n = a^n b^n$.

定义 2.4　设 H 为群 G 的非空子集. 如果 H 在 G 的运算下构成群，则称 H 为 G 的子群，记作 $H\le G$. 显然，任何群 G 都有两个子群 $\{e\}$ 和 G，称为平凡子群. 若子群 $H\ne G$，则称 H 为 G 的真子群，记作 $H<G$.

定义 2.5　设 G 为群，H,K 为群 G 的子集，规定 H,K 的乘积为

$$HK = \{hk \mid h\in H, k\in K\}$$

如果 $K=\{a\}$，则简记为 $H\{a\} = Ha$，类似的有 $\{a\}H = aH$.还规定

$$H^{-1} = \{h^{-1} \mid h\in H\},\ \ H^n = \{h_1h_2\cdots h_n \mid h_i\in H\}, n\in \mathrm{N}_+$$

定义 2.6　设 G 为群，$S\subseteq G$，则称 G 的所有包含 S 的子群的交为由 S 生成的子群，记作 $\langle S\rangle$，即

$$\langle S\rangle = \bigcap_{\substack{H\le G\\ S\subseteq H}} H$$

不难验证，

$$\langle S\rangle = \{e, a_1a_2\cdots a_n \mid a_i\in S\cup S^{-1}, n=1,2,\ldots\}.$$

类似的，设 $S_1,S_2,\ldots,S_r\subseteq G$，则称 G 的所有包含 $S_1,S_2,\ldots,S_r$ 的子群的交为由 $S_1,S_2,\ldots,S_r$ 生成的子群，记作 $\langle S_1,S_2,\ldots,S_r\rangle$，即

$$\langle S_1,S_2,\ldots,S_r\rangle = \bigcap_{\substack{H\le G\\ S_1,S_2,\ldots,S_r\subseteq H}} H$$

不难验证，

$$\langle S_1,S_2,\ldots,S_r\rangle = \left\{e, a_1a_2\cdots a_n \mid a_i \in \bigcup_{j=1}^{r}\left(S_j \cup S_j^{-1}\right), n=1,2,\ldots\right\}.$$

定义 2.7 设G为群，$a\in G$，则称仅由a生成的子群$H=\langle a\rangle$叫做循环群. 对于群G中的元素a，称$\langle a\rangle$的阶为元素a的阶，记作$o(a)$，即$o(a)=|\langle a\rangle|$. 由此定义知，$o(a)$是满足$a^n=e$的最小正整数n. 如果这样的正整数n不存在，则称a的阶为无穷，记作$o(a)=\infty$.

定义 2.8 设G为群，$H\le G$，$a\in G$，称形如aH(相应的，Ha)的子集为H的一个左陪集(相应的，右陪集). 至此，可在群G中定义关系$\sim$如下：对于任意的$a,b\in G$，

$$a\sim b \Leftrightarrow \text{存在} h\in H\text{，使得} a=bh$$

则易知$\sim$是群G上的等价关系，a所在的等价类为$[a]=aH$，故

$$G=\bigcup_{a\in G} aH$$

即群G可划分为若干个左陪集之并，称H在G中所有不同左陪集的个数称为H在G中的指数，记作$|G:H|$，考虑到$|aH|=|H|,\forall a\in G$，故有

引理 2.9 **(Lagrange 定理)**[6] 设G为群，$H\le G$，则$|G|=|G:H||H|$

推论 2.10 设G为群，则任意元素a的阶整除群G的阶，即$o(a) \mid |G|$，于是$a^{|G|}=e$.

推论 2.11 设G为群，$H,K\le G$，则

$$|HK|=\frac{|H||K|}{|H\cap K|}$$

定义 2.12 设G为群，$H\le G$，若

$$gH=Hg,\forall g\in G\text{，或}\quad gHg^{-1}=H,\forall g\in G$$

则称H是G的正规子群，记作$H\lhd G$. 根据正规子群的定义，任何一个群G都有两个平凡的正规子群：$\{e\}$和G. 只有这两个平凡正规子群的有限群称为单群.

定义 2.13 设G为群，$H\le G$，称

$$N_G(H)=\{g\in G \mid gHg^{-1}=H\}\text{和}\,C_G(H)=\{g\in G \mid gh=hg,\forall h\in H\}$$

分别为H在G中的正规化子和中心化子. 由定义知

$$H\lhd G \Leftrightarrow N_G(H)=G\text{，且}\,C_G(H)\lhd N_G(H)$$

引理 2.14 [6] 设G为群，$H\le G$，且$|G:H|=2$，则$H\lhd G$.

定义 2.15 设G为群，$H,K\le G$，$a\in G$，称形如HaK的子集为H,K关于G的一个双陪集.

引理 2.16 [2] H,K关于G的所有双陪集构成了G的一个分划，即

$$G=\bigcup_{a\in G} HaK\ ,\ HaK\bigcap HbK=\varnothing$$

引理 2.17 [2] H,K 关于 G 的一个双陪集 HaK 可表示成若干个 H 的右陪集(或 K 的左陪集)之并，它包含 H 的右陪集的个数为

$$\left|K:K\bigcap aHa^{-1}\right|$$

包含 K 的左陪集的个数为

$$\left|aHa^{-1}:aHa^{-1}\bigcap K\right|$$

引理 2.18 [6] 设 G 为群，$H\lhd G$，则 H 的全体左陪集在乘法

$$(aH)(bH)=(ab)H$$

下构成一个群，称为 G 关于 H 的商群，记作 G/H，其中，单位元为 H；aH 的逆元为 $a^{-1}H$.

定义 2.19 设 G，G' 为群，映射 $\varphi:G\to G'$ 称为由 G 到 G' 的同态，如果 φ 保持群运算，即任给 $a,b\in G$，都有

$$\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$$

如果 φ 又是单(满)射，则称 φ 是单(满)同态. 既单又满的同态称为同构.，此时称群 G 和 G' 是同构的，记作 $G\cong G'$. 若 $G'=G$，则称 φ 为自同态(构). 群 G 的全体自同构组成集合构成一个群，称为 G 的自同构群，记作 $\mathrm{Aut}(G)$.

定义 2.20 设 G，G' 为群，映射 $\varphi:G\to G'$ 为群同态，称

$$Ker\varphi=\{g\in G\,|\,\varphi(g)=e'\}$$

为同态的核. 又称

$$\mathrm{Im}\,\varphi=\{\varphi(g)\,|\,g\in G\}$$

为同态的像. 易知，$Ker\varphi\lhd G$，$\mathrm{Im}\,\varphi\le G'$.

引理 2.21 (**同态基本定理**)[6] 设 G，G' 为群，映射 $\varphi:G\to G'$ 为群同态，则

$$G/Ker\varphi\cong \mathrm{Im}\,\varphi$$

引理 2.22 (**N/C 定理**)[2] 设 G 为群，$H\le G$，则

$$N_G(H)/C_G(H)\text{同构于}\,\mathrm{Aut}(H)\text{的某个子群}$$

定义 2.23 设 G 为群，对于任意 $a\in G$，定义映射

$$L(a):G\to G\quad,\quad g\mapsto ag$$

则易知 $L(a)$ 是 G 上一个双射，且 $L(G)=\{L(a)\,|\,a\in G\}$ 构成一个群.

引理 2.24 [6] 设 M 为一个集合，则 M 上所有的双射的全体对于映射的乘法(复合)构成一个群，叫做 M 的对称群，记作 $S(M)$. $S(M)$ 的任意子群称为 M 上的变换群.

引理 2.25[6] 设 M 为一个有限集合，则 $S(M)$ 中元素称为 M 上的置换. 且有性质：

① M 上的任一置换可表示为互不相交的轮换的乘积，若不计次序，分解式是唯一的；
② M 上的任一置换可表示为若干的对换的乘积，且同一置换的不同分解式中对换个数的奇偶性是确定的. 分解式中含奇数个对换的置换叫做奇置换，反之称为偶置换.

引理 2.26 (Cayley 定理)[6] 任何群 G 都同构于某个集合上的变换群. 具体的：

$$G \cong L(G) \le S(G)$$

引理 2.27[6] 无限循环群必同构于整数加群 Z，有限循环群必同构于整数加群的某个商群 Z/nZ (常记作 Z_n).

引理 2.28[6] 循环群 $G=\langle a\rangle$ 的子群仍为循环群. 无限循环群 Z 的全部子群恰为 $\langle a^s\rangle, \forall s\in \mathrm{N}$；有限 n 阶循环群 Z_n 的全部子群恰为 $\langle a^s\rangle, \forall s\in \mathrm{N}, s\mid n$.

引理 2.29[2] 循环群 G 的自同构群是交换群. 无限循环群 Z 只有两个自同构，$\mathrm{Aut}(Z)\cong \mathrm{Z}_2$；有限 n 阶循环群 Z_n 有 $\varphi(n)$ 个自同构(这里 φ 是欧拉 φ 函数)，$\mathrm{Aut}(Z_n)\cong \mathrm{U}(n)$

定义 2.30 设 G 为群，A 为非空集合，如果存在一个映射

$$\varphi: G\times A\to A$$

$$(g,a)\mapsto ga$$

满足条件：

$$(1)\ 1a=a, \forall a\in A$$

$$(2)\ g_1(g_2a)=(g_1g_2)a, \forall a\in A, g_1, g_2\in G$$

则称群 G 作用在集合 A 上. 作用的核 $Ker\varphi=\{g\in G\mid ga=a,\forall a\in A\}$. 若 $Ker\varphi=\{e\}$，则称群 G 忠实的作用在集合 A 上.

引理 2.31[2] 设群 G 作用在集合 A 上，那么作用的集合与群 G 到 $S(A)$ 的所有同态组成的集合之间存在一个双射.

定义 2.32 设群 G 作用在集合 A 上，任取 $a\in A$，称.

$$G_a=\{g\in G\mid ga=a\} \text{和} O_a=\{ga\mid g\in G\}$$

分别为 a 在 G 中的稳定化子和 a 在 G 作用下的轨道. 根据定义，易知 $G_a\le G$. 若群 G 作用在集合 A 上只有一个轨道，即对于任意的 $a,b\in A$，都存在 $g\in G$，使得 $a=gb$，则称这个作用是传递的.

引理 2.33[7] 设群 G 作用在集合 A 上，在集合 A 中定义关系 $\sim$ 如下：对于任意的 $a,b\in A$，

$$a\sim b \Leftrightarrow \text{存在 } g\in G\text{，使得 } a=gb$$

则易知 $\sim$ 是集合 A 中的等价关系，a 所在的等价类为 $[a]=O_a$，故

$$A=\bigcup_{a\in A} O_a$$

即集合 A 可划分为若干个轨道之并，且 G 作用在 O_a 上是传递的，$|O_a|=|G:G_a|$. 故

$$|A|=\sum|O_a|=\sum|G:G_a|$$

引理 2.34[7] G 为群，$H\le G$，$A=\{aH\mid a\in G\}$，定义映射

$$\varphi: G\times A\to A$$

$$(g,aH)\mapsto (ga)H$$

则

(1) 这是一个群作用；

(2) 这个作用是传递的；

(3) 作用的核 $Ker\varphi = \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$；

(4) $Ker\varphi = \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$ 是 G 含在 H 中的最大正规子群.

【注】由此引理和 $A_n\left(n\geq 5\right)$的单性，知任何单群 G 必不含指数 ≤ 4 的子群.

引理 2.35[7] G 为群，定义映射

$$\varphi: G\times G\to G$$

$$\left(g,a\right)\mapsto gag^{-1}$$

则

(1) 这是一个群作用(称为共轭作用)；

(2）作用的核 $Ker\varphi = \left\{g\in G \mid ga = ag, \forall a\in G\right\} \triangleq Z\left(G\right)$(群 G 的中心)；

(3) 任取 $a\in G$，则

$$G_a = \left\{g\in G \mid gag^{-1} = a\right\} = \left\{g\in G \mid ga = ag\right\} = C_G\left(a\right)$$

$$O_a = \left\{ga \mid g\in G\right\}\text{称为 } a \text{ 所在的共轭类}$$

则得到类方程

$$\left|G\right| = \sum\left|O_a\right| = \left|Z\left(G\right)\right| + \sum_{a\notin Z(G)}\left|G:C_G\left(a\right)\right|$$

引理 2.36[7] G 为群，$A = \left\{H \mid H\subseteq G\right\}$，定义映射

$$\varphi: G\times A\to A$$

$$\left(g,H\right)\mapsto gHg^{-1}$$

则

(1) 这是一个群作用(称为共轭作用)；

(2）任取 $H\in A$，

$$G_H = \left\{g\in G \mid gHg^{-1} = H\right\} = N_G\left(H\right)\text{，且}\left|O_H\right| = \left|G:N_G\left(H\right)\right|.$$

引理 2.37[7] **(Cauchy 定理)** 若 G 为有限群，p 是素数. $p \mid |G|$，则 G 必存在阶为 p 的子群.

引理 2.38[2] **(Sylow 第 1 定理)** 若 G 为有限群，p 是素数. 设 $|G| = p^n m$, $(p,m)=1$，则 G 必存在阶为 p^n 的子群 P，叫做 G 的 $Sylow\ p-$子群.

引理 2.39[7] **(Sylow 第 2 定理)** G 的任意两个 $Sylow\ p-$子群 P_1,P_2 都在 G 中共轭，即 $\exists g\in G$，使得 $P_1 = gP_2g^{-1}$.

引理 2.40[2] **(Sylow 第 3 定理)** 设 G 的 $Sylow\ p-$子群的个数为 n_p，则 $n_p \mid m$，且 $n_p\equiv 1\left(\mathrm{mod}\ p\right)$.

引理 2.41[2] 若群 G 的 $Sylow\ p-$子群的个数为 $n_p \neq 1\ (\mathrm{mod}\ p^2)$，则必存在两个

$Sylow\ p-$子群P_1,P_2，使得$\left|P_i:P_1\cap P_2\right|=p\,(i=1,2)$.

引理 2.42[2] G为有限群，P_1是G的$p-$子群，但不是$Sylow\ p-$子群，P是G的$Sylow\ p-$子群，则必存在$g\in G$，使得

$$P_1<gPg^{-1}$$

引理 2.43[2] 若G为有限群，P是G的$p-$子群，但不是$Sylow\ p-$子群，则$P<N_G\left(P\right)$.

定义 2.44 设G为群，P是G的$Sylow\ p-$子群，若存在$N\lhd G$，满足

$$\begin{cases}N\cap P=\{e\}\\ NP=G\end{cases}$$

则称N是G的正规$p-$补.

引理 2.45[2] 若G为有限群，P是G的$Sylow\ p-$子群，若$C_G\left(P\right)=N_G\left(P\right)$，则$G$必有正规$p-$补$N$.

定义 2.46 设G为群，$\forall x,y\in G$，称$\left[x,y\right]=x^{-1}y^{-1}xy$为$x,y$的换位子.

定义 2.47 设G为群，称

$$G^{'}=\left\langle\left[x,y\right]\mid x,y\in G\right\rangle$$

为G的换位子群，则$G^{'}\lhd G$. 并可归纳的定义：$G^{(1)}=G^{'}$，$G^{(n)}=\left(G^{(n-1)}\right)'$，且有

$$G\rhd G'\rhd G^{(2)}\rhd\cdots\rhd G^{(n)}\rhd\cdots$$

定义 2.48 设G为群，若存在$n\in N_+$，使得$G^{(n)}=\{e\}$，则称G为可解群.

引理 2.49 (Burnside 定理)[2] 若G为有限群，且$\left|G\right|=p^aq^b$，p,q为素数，$a,b\in N_+$，则G为可解群.

引理 2.50 [2] 若G为有限群，$\left|G\right|=pm,\left(p,m\right)=1$，$p$为素数，$P$为$G$的$Sylow\ p-$子群，则任给$x\in N_G(P)\setminus C_G(P)$，$x$最多可正规化$k=1+\dfrac{n_p-1}{p}$个$Sylow\ p-$子群.

§2.2 主要结果

定理 1 设G的阶$\left|G\right| = p^a\ (a \in \mathrm{N}_+)$， p是奇素数，则G一定不是单群.

证明：根据**引理 2.35**，令群G依共轭作用在G上，得到类方程

$$\left|G\right| = \sum\left|O_a\right| = \left|Z\left(G\right)\right| + \sum_{a \notin Z(G)}\left|G : C_G\left(a\right)\right|$$

又根据**引理 2.9**

$$p \mid \left|G\right|，且\ p \mid \left|G : C_G\left(a\right)\right|(a \in Z(G))$$

故

$$p \mid \left|Z(G)\right|$$

即

$$Z(G) > \left\{e\right\}$$

(1)若

$$Z(G) < G$$

则

$$Z(G) \lhd G\ 是非平凡的正规子群，G\ 不是单群；$$

(2)若

$$Z(G) = G$$

则G是交换群，则任何子群均为正规子群，取

$$e \neq x \in G，则\ H = \left\langle x \right\rangle \lhd G，$$

如果G是单群，则

$$H = \left\langle x \right\rangle = G$$

G为$p^a\ (a \in \mathrm{N}_+)$阶循环群，而根据**引理 2.28**，$G$必有非平凡的正规子群，非单群，矛盾！

综上所述：$p^a\ (a \in \mathrm{N}_+)$阶群一定不是单群.

700 以内满足**定理 1** 条件的数为：

3、9、27、81、243、5、25、125、7、49、343、11、121、13、169、17、289、19、361、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97、101、103、107、109、113、127、131、137、139、149、151、157、163、167、173、179、181、191、193、197、199、211、223、227、229、233、239、241、243、251、256 、257、263、269、271、277、281、283、293、307、311、313、317、331、337、343、347、349、353、359、367、373、379、383、389、397、401、409、419、421、431、433、439、443、449、457、461、463、467、479、487、491、499、503、509、512、521、523、529、541、547、557、563、569、571、577、587、593、599、601、607、613、619、625、631、641、643、647、653、659、661、673、677、683、691.

阶为上述数的群一定不是单群.

定理 2 设G的阶$\left|G\right| = pq$， p,q是不同的素数，则G一定不是单群.

证明：不妨设$p < q$，根据**引理 2.38**、**引理 2.40**，群G存在$Sylow\ q-$子群，且

$$\begin{cases} n_q \equiv 1\left(\bmod q\right) \\ n_q \mid p \end{cases}$$

从而$n_q = 1$，即群G存在唯一的$Sylow\ q-$子群，设为Q，因为$\forall g \in G$，$\left|gQg^{-1}\right| = \left|Q\right|$，

所以 gQg^{-1} 也是 G 的 $Sylow\ q-$子群，从而

$$\forall g \in G\text{，均有 } gQg^{-1} = Q$$

故

$$Q \lhd G$$

即 Q 是 G 的非平凡正规子群，所以 G 不是单群.

700 以内满足**定理 2** 条件的数为：

6、10、14、15、21、22、26、33、34、35、38、39、46、51、55、57、58、62、65、69、74、77、82、85、86、87、91、93、94、95、106、111、115、118、119、122、123、129、133、134、141、142、143、145、146、155、158、159、161、166、177、178、183、185、187、194、201、202、203、205、206、209、213、214、215、217、218、219、221、226、235、237、247、249、253、254、259、262、267、274、278、287、295、298、299、301、302、303、305、309、314、319、321、323、326、327、329、334、335、339、341、346、355、358、362、365、371、377、381、382、391、393、394、395、398、403、407、411、413、415、417、422、427、437、445、446、447、451、453、454、458、466、469、471、473、478、481、482、485、489、493、497、501、502、505、511、514、515、517、519、526、527、530、533、535、537、538、542、543、545、551、553、554、559、562、565、566、573、579、581、583、586、589、591、597、611、614、622、623、626、629、633、634、635、649、655、662、667、669、671、674、679、681、685、687、689、694、695、697、698、699.

阶为上述数的群一定不是单群.

定理 3　设 G 的阶 $|G| = p^a q$， p,q 是不同的素数， $a \in N_+, a \geq 2$，则 G 一定不是单群.

证明：根据根据**引理 2.38**、**引理 2.40**，群 G 存在 $Sylow\ p-$子群 P，并设 $P = P_1, \cdots, P_s$ 为全部的 $Sylow\ p-$子群. 而

$$\begin{cases} s \equiv 1 \pmod p \\ s \mid q \end{cases}$$

故 $s = q$，下面分两种情况讨论：

(1)若对任意 $i \neq j, P_i \bigcap P_j = \{e\}$，则

$$\left| \bigcup_{i=1}^{q} P_i \right| = q\left(p^a - 1\right) + 1$$

而

$$|G| = p^a q$$

故还剩下

$$p^a q - q\left(p^a - 1\right) - 1 = q - 1 \text{个元素}$$

而群 G 存在 $Sylow\ q-$子群 Q，故 $n_q = 1$，根据**定理 2** 的证明过程知 $Q \lhd G$，G 不是单群；

(2)若存在 $P_i \bigcap P_j \neq \{e\}$，选取这样的 $i \neq j$，使 $\left|P_i \bigcap P_j\right|$ 最大，记 $D = P_i \bigcap P_j$，则

$$D < P_i\text{，且 } D < P_j$$

故根据**引理 2.43**

$$D < N_{P_i}(D) \triangleq H_i \leq P_i\text{，且 } D < N_{P_j}(D) \triangleq H_j \leq P_j$$

从而根据**定义 2.6**

$$D \lhd \langle H_i, H_j \rangle \triangleq T \le G$$

①若T是$p-$子群，根据**引理 2.42**，存在G的$Sylow\ p-$子群P_k，使得$T \le P_k$，故

$$P_i \cap P_k \ge H_i > D\text{，且}P_j \cap P_k \ge H_j > D$$

由D的极大性知$P_i = P_k = P_j$，矛盾！

②若$|T| = p^t q,(t \le a)$，根据**引理 2.38**，T存在$Sylow\ q-$子群Q，根据**推论 2.11**，

$$|P_iQ| = \frac{|P_i||Q|}{|P_i \cap Q|} = p^a q = |G|$$

故$G = P_iQ$，令

$$N = \langle gdg^{-1} \mid d \in D, g \in G \rangle$$

则根据**定义 2.12**，$N \lhd G$，且N是G中包含D的最小正规子群. 又$\forall g \lhd G$，可设$g = xy, x \in P_i, y \in Q$，从而

$$gDg^{-1} = (xy)D(xy)^{-1} = x(yDy^{-1})x^{-1} = xDx^{-1} \le P_i$$

于是$N \le P_i < G$，即N是G的非平凡正规子群，G不是单群.
综上所述，结论成立.

700 以内满足**定理 3** 条件的数为：

12、18、20、24、28、40、44、45、48、50、52、54、56、68、75、76、80、88、92、96、98、99、104、112、116、117、124、135、136、147、148、152、153、160、162、171、172、175、176、184、188、189、192、207、208、212、224、232、236、242、244、245、248、250、261、268、272、275、279、284、292、296、297、304、316、320、325、328、332、333、338、344、351、352、363、368、369、375、376、384、387、388、404、405、412、425、428、436、448、452、459、464、472、477、484、486、488、496、508、513、524、531、536、539、544、548、549、556、567、568、575、584、592、603、604、605、608、624、628、632、637、639、640、652、656、657、664、668.

阶为上述数的群一定不是单群.

定理 4　设G的阶$|G| = p^2q^2$，p,q是不同的素数，则G一定不是单群.
证明：不妨设$p > q$，根据**引理 2.38**、**引理 2.40**，群G存在$Sylow\ p-$子群P，设其个数为n_p，则

$$\begin{cases} n_p \equiv 1 \pmod p \\ n_p \mid q^2 \end{cases}$$

又$p > q$，故$n_p = 1$或$n_p = q^2$，下分两种情况讨论：
(1) 若$n_p = 1$，根据**定理 2** 的证明过程知$Sylow\ p-$子群$P \lhd G$，G不是单群；
(2) 若$n_p = q^2$，根据**引理 2.36**，群G依共轭作用在$A = \{H \mid H \subseteq G\}$时，

$$G_P = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} = N_G(P)\text{，且}|O_P| = |G : N_G(P)|$$

而根据**引理 2.39**，$n_p = |O_P|$，故

$$\left|N_G\left(P\right)\right| = \frac{\left|G\right|}{\left|n_p\right|} = p^2 = \left|P\right|$$

但$P \le N_G\left(P\right)$，故$P = N_G\left(P\right)$. 而由$\left|P\right| = p^2$知P是交换群，故$P \le C_G\left(P\right) \le N_G\left(P\right)$，所以$C_G\left(P\right) = N_G\left(P\right)$，根据**引理 2.45**，$G$有正规$p-$补$N$，即$N$是$G$的非平凡正规子群，$G$不是单群. 综上所述，结论成立.

700 以内满足**定理 4** 条件的数为：

30、100、196、441、676.

阶为上述数的群一定不是单群.

定理 5 设G的阶$\left|G\right| = pqr$，$p > q > r$是不同的素数，则G一定不是单群.

证明：根据**引理 2.38**，群G存在$Sylow\ p-$子群，$Sylow\ q-$子群,$Sylow\ r-$子群，其个数分别为n_p, n_q, n_r. 下分两种情况讨论：

(1) 若n_p, n_q, n_r中有一个等于 1，不妨设$n_p = 1$，则根据**定理 2** 的证明过程知$Sylow\ p-$子群$P \lhd G$，G不是单群；

(2) 若n_p, n_q, n_r均大于 1，根据**引理 2.40**，

$$\begin{cases} n_p \equiv 1\left(\bmod p\right) \\ n_p \mid qr \end{cases}, \quad \begin{cases} n_q \equiv 1\left(\bmod q\right) \\ n_q \mid rp \end{cases}, \quad \begin{cases} n_r \equiv 1\left(\bmod r\right) \\ n_r \mid pq \end{cases}$$

而$p > q > r$，故

$$n_p = qr, n_q \ge p, n_r \ge q$$

因此，

$$G\text{中}\,p\,\text{阶元的个数} = n_p\left(p-1\right) = qr\left(p-1\right) = pqr - qr$$

$$G\text{中}\,q\,\text{阶元的个数} = n_q\left(q-1\right) \ge p\left(q-1\right) = pq - p$$

$$G\text{中}\,r\,\text{阶元的个数} = n_r\left(r-1\right) \ge q\left(r-1\right) = qr - q$$

于是有

$$\begin{aligned} &\left|G\right| \ge 1 + \left(pqr - qr\right) + \left(pq - p\right) + \left(qr - q\right) = pqr + \left(pq - p - q + 1\right) \\ &= \left|G\right| + \left(p-1\right)\left(q-1\right) > \left|G\right| \end{aligned}$$

矛盾！

综上所述，结论成立.

700 以内满足**定理 5** 条件的数为：

30、42、66、70、78、102、105、110、114、130、138、154、165、170、174、182、186、190、195、222、230、231、238、246、255、266、273、282、285、286、290、310、318、322、345、354、357、366、370、374、385、399、402、406、410、418、426、429、430、434、435、442、455、465、470、474、483、494、498、506、507、518、534、555、561、574、590、595、598、602、606、609、610、615、618、627、638、642、645、646、651、658、663、665、670、678、682.

阶为上述数的群一定不是单群.

定理 6　设 G 的阶 $|G| = 2n$，n 是奇数，则 G 一定不是单群.

证明：根据**定义 2.23**　对于任意 $a \in G$，定义映射

$$L(a): G \to G \quad , \quad g \mapsto ag$$

则 $L(a)$ 是 G 上一个双射，且 $L(G) = \{L(a) | a \in G\}$ 构成一个群. 从而 $L(G) \le S(G)$.根据**引理 2.26**，对于任意 $a \in G$，定义映射

$$\varphi: G \to L(G)$$
$$a \mapsto L(a)$$

则 φ 是群同构，从而 $G \cong L(G) \le S(G)$，根据**引理 2.38**，群 G 必含有一个 2 阶元 a，则 $L(a)$ 是 $S(G)$ 中的 2 阶元，故 $L(a)$ 可表示为若干互不相交的对换的乘积，而根据 $L(a)$ 的定义，任意 $g \in G$，$L(a)(g) = ag \ne g$，即置换 $L(a)$ 不保持 G 中任何元素不动，所以 $L(a)$ 恰为 n 个互不相交的对换的乘积，即 $L(a)$ 是奇置换，从而 $L(G) = \{L(a) | a \in G\}$ 中所含奇、偶置换各一半，而若定义

$$H(G) = \{L(a) \in L(G) \mid L(a) \text{是偶置换}\}$$

则根据**定义 2.1** 、**定义 2.4** 可知 $H(G) \le L(G)$，且 $|L(G) : H(G)| = 2$，从而

$$\varphi^{-1}(H(G)) \le G\text{，且} |G : \varphi^{-1}(H(G))| = 2$$

根据**引理 2.14**，$\varphi^{-1}(H(G)) \lhd G$，$G$ 不是单群，结论成立.

700 以内满足**定理 6** 条件的数为：

90、126、150、198、210、234、294、306、330、342、350、378、390、414、462、490、510、522、546、558、570、578、582、630、650、654、666、686、690.

阶为上述数的群一定不是单群.

定理 7　设 G 的阶为 $|G|$，p 是素数，且 $p \mid |G|$，若 G 有唯一的 $Sylow\ p-$ 子群，则 G 一定不是单群.

证明：根据**定理 2** 的证明过程即知，略.

700 以内满足**定理 7** 条件的数为：

84($n_7 = 1$)、140($n_7 = 1$)、156($n_{13} = 1$)、200($n_5 = 1$)、204($n_{17} = 1$)、220($n_{11} = 1$)、228($n_{19} = 1$)、252($n_7 = 1$)、260($n_{13} = 1$)、276($n_{23} = 1$)、308($n_{11} = 1$)、312($n_{13} = 1$)、315($n_7 = 1$)、340($n_{17} = 1$)、348($n_{29} = 1$)、372($n_{31} = 1$)、408($n_{17} = 1$)、440($n_{11} = 1$)、444($n_{37} = 1$)、456($n_{19} = 1$)、460($n_{23} = 1$)、468($n_{13} = 1$)、476($n_{17} = 1$)、492($n_{41} = 1$)、516($n_{43} = 1$)、525($n_7 = 1$)、532($n_{19} = 1$)、550($n_{11} = 1$)、564($n_{47} = 1$)、572($n_{13} = 1$)、580($n_{29} = 1$)、585($n_{13} = 1$)、588($n_7 = 1$)、594($n_3 = 1$)、596($n_{149} = 1$)、620($n_{31} = 1$)、621($n_{23} = 1$)、636($n_{53} = 1$)、644($n_{23} = 1$)、680($n_{17} = 1$)、684($n_{19} = 1$)、688($n_{43} = 1$)、692($n_{173} = 1$)、693($n_{11} = 1$)、696($n_{29} = 1$)、700($n_7 = 1$).

阶为上述数的群一定不是单群.

定理 8 设G的阶为$|G| = p^a q^b$，p,q为不同的素数，$a,b \in N_+$，则G一定不是单群.

证明：根据**引理 49** 知，G是可解群. 若G同时也是单群，则根据可解群的定义知必有

$$G' = \{e\}$$

从而

$$\forall x, y \in G，\left[x, y\right] = x^{-1} y^{-1} xy = e$$

即$\forall x, y \in G$，$xy = yx$，G为交换群，故G的$Sylow\ p-$子群P是G的非平凡正规子群，矛盾！故G一定不是单群.

700 以内满足**定理 8** 条件的数为：

72、108、144、216、225、288、324、392、400、432、441、500、576、648、675.

阶为上述数的群一定不是单群.

到此为止，只剩下

$$|G| \in \begin{Bmatrix} 2, 60, 120, 132, 240, 270, 280, 300, 380, 495, 504, \\ 520, 528, 540, 552, 560, 600, 612, 616, 660, 672 \end{Bmatrix}$$

这21种情况，下面逐一讨论之：

(1) $|G| = 2$时，$G \cong Z_2$，必为单群.

(2) $|G| = 60$时，若$G \cong Z_{60}$，则G不是单群；若$G \cong A_5$，则G为单群.

(3) $|G| = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$时，根据**引理 2.40**，

$$\begin{cases} n_5 \equiv 1 \pmod{5} \\ n_5 \mid 24 \end{cases}$$

故$n_5 = 1$或$n_5 = 6$，若G是单群，则$n_5 = 6$，任取G的$Sylow\ 5-$子群P，根据**引理 2.36** 知$\left|G : N_G(P)\right| = 6$，考虑$G$在$N_G(P)$的左陪集空间上的左乘作用，该作用诱导出$G$到$S_6$上的同态$\varphi$，根据**引理 2.34**，

$$G / Ker\varphi \cong \varphi(G) \le S_6$$

而G是单群，故$Ker\varphi = 1$，故

$$G \cong \varphi(G) \le S_6$$

根据**定理 6** 的证明过程知$\varphi(G)$不含奇置换，故

$$G \cong \varphi(G) \le A_6$$

故$\left|A_6 : \varphi(G)\right| = 3$，根据**引理 2.34** 的注知，这是不可能成立的，故G不是单群.

(4) $|G| = 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$时，根据**引理 2.40**，

$$\begin{cases} n_{11} \equiv 1 \pmod{11} \\ n_{11} \mid 12 \end{cases},\quad \begin{cases} n_3 \equiv 1 \pmod{3} \\ n_3 \mid 44 \end{cases}$$

若G是单群，则必有$n_{11} = 12$和$n_3 = 4, 22$，根据**引理 2.34** 的注知，必有$n_3 = 22$，故G含

有

$$(11-1)\times 12=120\text{ 个 }11\text{ 阶元}$$

$$(3-1)\times 22=44\text{ 个 }3\text{ 阶元}$$

而$120+44=164>132$，矛盾！故G不是单群.

(5) $|G|=240=2^4\cdot 3\cdot 5$时，根据**引理 2.40**，

$$\begin{cases} n_5\equiv 1(\mathrm{mod}\,5) \\ n_5\mid 48 \end{cases}$$

若G是单群，则必有$n_5=6$，任取G的$Sylow\,5-$子群P，根据**引理 2.36**知$|G:N_G(P)|=6$，同**(3)** 中证明过程可知$G\cong\varphi(G)\le A_6$，但$|G|=240$不能整除$|A_6|=360$，矛盾！故G不是单群.

(6) $|G|=270=2\cdot 3^3\cdot 5$时，根据**引理 2.40**，

$$\begin{cases} n_5\equiv 1(\mathrm{mod}\,5) \\ n_5\mid 54 \end{cases}$$

若G是单群，则必有$n_5=6$，任取G的$Sylow\,5-$子群P，根据**引理 2.36**知$|G:N_G(P)|=6$，同**(3)** 中证明过程可知$G\cong\varphi(G)\le A_6$，但$|G|=270$不能整除$|A_6|=360$，矛盾！故G不是单群.

(7) $|G|=280=2^3\cdot 5\cdot 7$时，根据**引理 2.40**，

$$\begin{cases} n_5\equiv 1(\mathrm{mod}\,5) \\ n_5\mid 56 \end{cases},\quad \begin{cases} n_7\equiv 1(\mathrm{mod}\,7) \\ n_7\mid 40 \end{cases}$$

若G是单群，则必有$n_5=56$和$n_7=8$，故G含有

$$(5-1)\times 56=224\text{ 个 }5\text{ 阶元}$$

$$(7-1)\times 8=48\text{ 个 }7\text{ 阶元}$$

故还剩下

$$280-224-48=8\text{ 个元素}$$

而群G存在$Sylow\,2-$子群，故$n_2=1$，根据**定理 7** 知，G不是单群.

(8) $|G|=300=2^2\cdot 3\cdot 5^2$时，根据**引理 2.40**，

$$\begin{cases} n_5\equiv 1(\mathrm{mod}\,5) \\ n_5\mid 12 \end{cases}$$

若G是单群，则必有$n_5=6$，任取G的$Sylow\,5-$子群P，根据**引理 2.36**知$|G:N_G(P)|=6$，同**(3)** 中证明过程可知$G\cong\varphi(G)\le A_6$，但$|G|=300$不能整除$|A_6|=360$，矛盾！故G不是单群.

(9) $|G|=380=2^2\cdot 5\cdot 19$时，根据**引理 2.40**，

$$\begin{cases} n_{19} \equiv 1 \pmod{19} \\ n_{19} \mid 20 \end{cases}, \quad \begin{cases} n_5 \equiv 1 \pmod{5} \\ n_5 \mid 76 \end{cases}$$

若 G 是单群，则必有 $n_{19}=20$ 和 $n_5=76$，故 G 含有

$$(19-1)\times 20 = 360 \text{ 个 } 19 \text{ 阶元}$$

$$(5-1)\times 76 = 304 \text{ 个 } 5 \text{ 阶元}$$

而 $360+304=664>380$，矛盾！故 G 不是单群.

(10) $|G|=495=3^2\cdot 5\cdot 11$ 时，根据**引理 2.40**，

$$\begin{cases} n_{11} \equiv 1 \pmod{11} \\ n_{11} \mid 45 \end{cases}, \quad \begin{cases} n_3 \equiv 1 \pmod{3} \\ n_3 \mid 55 \end{cases}$$

若 G 是单群，则必有 $n_{11}=45$ 和 $n_3=55$，故 G 含有

$$(11-1)\times 45 = 450 \text{ 个 } 11 \text{ 阶元}$$

$$(3-1)\times 55 = 110 \text{ 个 } 3 \text{ 阶元}$$

而 $450+110=560>495$，矛盾！故 G 不是单群.

(11) $|G|=504=2^3\cdot 3^2\cdot 7$ 时，因为单群 $PSL_2(F_8)$[2]的阶为

$$|PSL_2(F_8)| = \frac{(8^2-1)(8^2-8)}{(8-1)(2,8-1)} = 504$$

而 $G\cong Z_{504}$ 时，不是单群. 故 504 阶群 G 可能是单群，也可能不是单群.

(12) $|G|=520=2^3\cdot 5\cdot 13$ 时，根据**引理 2.40**，

$$\begin{cases} n_{13} \equiv 1 \pmod{13} \\ n_{13} \mid 40 \end{cases}, \quad \begin{cases} n_5 \equiv 1 \pmod{5} \\ n_5 \mid 104 \end{cases}$$

若 G 是单群，则必有 $n_{13}=40$ 和 $n_5=26$，故 G 含有

$$(13-1)\times 40 = 480 \text{ 个 } 13 \text{ 阶元}$$

$$(5-1)\times 26 = 104 \text{ 个 } 5 \text{ 阶元}$$

而 $480+104=584>520$，矛盾！故 G 不是单群.

(13) $|G|=528=2^4\cdot 3\cdot 11$ 时，根据**引理 2.40**，

$$\begin{cases} n_3 \equiv 1 \pmod{3} \\ n_3 \mid 176 \end{cases}$$

若 G 是单群，则必有 $n_3=16$，任取 G 的 $Sylow\,3-$ 子群 P，根据**引理 2.36** 知 $|G:N_G(P)|=16$，$|N_G(P)|=33$，根据**引理 2.22**，$N_G(P)/C_G(P)$ 同构于 $\mathrm{Aut}(P)$ 的某个子群，根据**引理 2.9**，$|N_G(P)/C_G(P)|\mid|\mathrm{Aut}(P)|=7-1=6$，故 $N_G(P)=C_G(P)$，根据**引理 2.45**，G 有正规 $3-$ 补，不是单群.

(14) $|G|=540=2^2\cdot 3^3\cdot 5$ 时，根据**引理 2.40**，

$$\begin{cases} n_5 \equiv 1 \pmod 5 \\ n_5 \mid 108 \end{cases}$$

若G是单群，则$n_5 = 6$或$n_5 = 26$，若$n_5 = 6$，同**(3)** 中证明过程可导出矛盾；若$n_5 = 26$，任取G的$Sylow\,5-$子群P，根据**引理 2.36** 知$\left|G:N_G(P)\right| = 26$，$\left|N_G(P)\right| = 15$，根据**引理 2.22**，$N_G(P)/C_G(P)$同构于$\mathrm{Aut}(P)$的某个子群，根据**引理 2.9**，$\left|N_G(P)/C_G(P)\right| \mid \left|\mathrm{Aut}(P)\right| = 5-1 = 4$，故$N_G(P) = C_G(P)$，根据**引理 2.45**，$G$有正规$5-$补，不是单群.

(15) $|G| = 552 = 2^3 \cdot 3 \cdot 23$时，根据**引理 2.40**，

$$\begin{cases} n_{23} \equiv 1 \pmod{23} \\ n_{23} \mid 24 \end{cases}$$

若G是单群，则$n_{23} = 24$，任取G的$Sylow\,23-$子群P，根据**引理 2.36** 知$\left|G:N_G(P)\right| = 24$，$\left|N_G(P)\right| = 23$，根据**引理 2.22**，$N_G(P)/C_G(P)$同构于$\mathrm{Aut}(P)$的某个子群，根据**引理 2.9**，$\left|N_G(P)/C_G(P)\right| \mid \left|\mathrm{Aut}(P)\right| = 23-1 = 22$，故$N_G(P) = C_G(P)$，根据**引理 2.45**，$G$有正规$23-$补，不是单群.

(16) $|G| = 560 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7$时，根据**引理 2.40**，

$$\begin{cases} n_7 \equiv 1 \pmod 7 \\ n_7 \mid 80 \end{cases}$$

若G是单群，则$n_7 = 8$，任取G的$Sylow\,7-$子群P，根据**引理 2.36** 知$\left|G:N_G(P)\right| = 8$，考虑$G$在$N_G(P)$的左陪集空间上的左乘作用，该作用诱导出$G$到$S_8$上的同态$\varphi$，根据**引理 2.34**，

$$G/Ker\varphi \cong \varphi(G) \le S_8$$

而G是单群，故$Ker\varphi = 1$，故

$$G \cong \varphi(G) \le S_8$$

根据**定理 6** 的证明过程知$\varphi(G)$不含奇置换，故

$$G \cong \varphi(G) \le A_8$$

因为7^2不能整除$|A_8| = \frac{1}{2} \cdot 8!$，故可将$G$的的$Sylow\,7-$子群$P$看做$A_8$的$Sylow\,7-$子群，而$S_8$中的$Sylow\,7-$子群个数为

$$\frac{P_8^7}{7 \cdot 6} = 960$$

故$\left|N_{S_8}(P)\right| = |S_8|/960 = 42$，但$\left|N_G(P)\right| = 70$，矛盾！故$G$不是单群.

(17) $|G| = 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$时，根据**引理 2.40**，

$$\begin{cases} n_5 \equiv 1 \pmod 5 \\ n_5 \mid 24 \end{cases}$$

若 G 是单群，则必有 $n_5=6$，任取 G 的 $Sylow\,5-$ 子群 P，根据**引理 2.36** 知 $\left|G:N_G\left(P\right)\right|=6$，同**(3)** 中证明过程可知 $G\cong\varphi\left(G\right)\le A_6$，但 $\left|G\right|=600$ 不能整除 $\left|A_6\right|=360$，矛盾！故 G 不是单群.

(18) $\left|G\right|=612=2^2\cdot3^2\cdot17$ 时，根据**引理 2.40**，

$$\begin{cases}n_3\equiv1\left(\bmod 3\right)\\ n_3\,|\,68\end{cases},\quad\begin{cases}n_{17}\equiv1\left(\bmod 17\right)\\ n_{17}\,|\,36\end{cases}$$

若 G 是单群，则必有 $n_3=34$ 和 $n_{17}=18$，任取 G 的 $Sylow\,17-$ 子群 P，根据**引理 2.36** 知 $\left|G:N_G\left(P\right)\right|=18$，$\left|N_G\left(P\right)\right|=34$，根据**引理 2.22**，$N_G\left(P\right)/C_G\left(P\right)\cong Aut(P)$ 的某个子群，而 $\left|Aut(P)\right|=17-1=16$，故 $\left|C_G\left(P\right)\right|=17$ 或 $\left|C_G\left(P\right)\right|=34$，若 $\left|C_G\left(P\right)\right|=34$，则根据**引理 2.45**，$G$ 有的正规 $17-$ 补，不是单群，矛盾！若 $\left|C_G\left(P\right)\right|=17$，因为 $n_3=34\ne1\left(\bmod 3^2\right)$，则根据**引理 2.41**，必存在两个 $Sylow\,3-$ 子群 Q_1,Q_2，使得 $\left|Q_i:Q_1\cap Q_2\right|=3\ (i=1,2)$，从而

$$Q_1\cap Q_2\lhd Q_1,\ Q_1\cap Q_2\lhd Q_2$$

所以

$$Q_1,Q_2\le N_G(Q_1\cap Q_2)$$

故

$$\left|N_G(Q_1\cap Q_2)\right|\ge\left|Q_1\cdot Q_2\right|=\frac{\left|Q_1\right|\left|Q_2\right|}{\left|Q_1\cap Q_2\right|}=27$$

考虑到 $9\,|\,\left|N_G(Q_1\cap Q_2)\right|\,|\,\left|G\right|=2^2\cdot3^2\cdot17$，故 $36\,|\,\left|N_G(Q_1\cap Q_2)\right|$，根据**引理 2.22**，

$$N_G\left(Q_1\cap Q_2\right)/C_G\left(Q_1\cap Q_2\right)\cong Aut(Q_1\cap Q_2)\text{ 的某个子群}$$

而 $\left|Aut(Q_1\cap Q_2)\right|=3-1=2$，故 $\left|C_G(Q_1\cap Q_2)\right|$ 恰含一个因数 2，考虑 $C_G(Q_1\cap Q_2)$ 的 $Sylow\,2-$ 子群 R，则 $R\left(Q_1\cap Q_2\right)\le G$ 是一个 6 阶循环群，从而 G 有 6 阶元 x，根据**引理 2.9**，$x\notin N_G\left(P\right)$，即 x 不能正规化任何一个 $Sylow\,17-$ 子群 P，考虑 G 在 $N_G\left(P\right)$ 的左陪集空间上的左乘作用，该作用诱导出 G 到 S_{18} 上的同态 φ，根据**引理 2.34**，和**定理 6** 的证明过程知 $\varphi\left(G\right)$ 不含奇置换，故

$$G\cong\varphi\left(G\right)\le A_{18}$$

故可将 x 看成 A_{18} 中的 6 阶元，且无不动点. 若 x 的轮换分解式中有对换，则 x^2 是 3 阶元且至少有两个不动点，从而 x^2 可正规化某个 $Sylow\,17-$ 子群 P'，从而 $x^2\in N_G\left(P'\right)$，但 $\left|N_G\left(P'\right)\right|=34$，所以这是不可能的！所以 x 的轮换分解式中只能含有偶数个(≥2) $6-$ 轮换和若干 $3-$ 轮换，设 x 的轮换分解式中含有 $2k\,(k\in N_+)$ 个 $6-$ 轮换和 l 个 $3-$ 轮换，则根据

$$2k\times6+3l=18$$

知只可能 $k=1,l=2$，即 x 的轮换分解式中含有 2 个 $6-$ 轮换和 2 个 $3-$ 轮换. 此时 x^3 是 2 阶元且恰好有 6 个不动点，即 x^3 正规化了 6 个 $Sylow\,17-$ 子群，且 $x^3\in N_G\left(P\right)\backslash C_G\left(P\right)$，但根据**引理 2.50** 知，$x^3$ 最多能正规化 $k=1+\frac{n_{17}-1}{17}=1+\frac{18-1}{17}=2$ 个 $Sylow\,17-$ 子群，矛盾！综上所述，故 G 不是单群,

(19) $\left|G\right|=616=2^3\cdot7\cdot11$时，根据**引理 2.40**，

$$\begin{cases}n_7\equiv1\pmod 7\\ n_7\mid 88\end{cases},\quad\begin{cases}n_{11}\equiv1\pmod{11}\\ n_{11}\mid 56\end{cases}$$

若G是单群，则必有$n_7=8$和$n_{11}=56$，故G含有

$$\left(7-1\right)\times8=48\text{ 个 }7\text{ 阶元}$$

$$\left(11-1\right)\times56=560\text{ 个 }11\text{ 阶元}$$

故还剩下

$$616-48-560=8\text{ 个元素}$$

而群G存在$Sylow\ 2-$子群，故$n_2=1$，根据**定理 7** 知，G不是单群.

(20) $\left|G\right|=660=2^2\cdot3\cdot5\cdot7$时，因为单群$PSL_2\left(F_{11}\right)$[2]的阶为

$$\left|PSL_2\left(F_{11}\right)\right|=\frac{\left(11^2-1\right)\left(11^2-11\right)}{\left(11-1\right)\left(2,11-1\right)}=660$$

而$G\cong Z_{660}$时，不是单群. 故 660 阶群G可能是单群，也可能不是单群.

(21) $\left|G\right|=672=2^5\cdot3\cdot7$时，根据**引理 2.40**，

$$\begin{cases}n_7\equiv1\pmod 7\\ n_7\mid 96\end{cases}$$

若G是单群，则$n_7=8$，任取G的$Sylow\ 7-$子群P，根据**引理 2.36** 知$\left|G:N_G\left(P\right)\right|=8$，考虑$G$在$N_G\left(P\right)$的左陪集空间上的左乘作用，该作用诱导出$G$到$S_8$上的同态$\varphi$，根据**引理 2.34**，

$$G/Ker\varphi\cong\varphi\left(G\right)\le S_8$$

而G是单群，故$Ker\varphi=1$，故

$$G\cong\varphi\left(G\right)\le S_8$$

根据**定理 6** 的证明过程知$\varphi\left(G\right)$不含奇置换，故

$$G\cong\varphi\left(G\right)\le A_8$$

因为7^2不能整除$\left|A_8\right|=\frac{1}{2}\cdot8!$，故可将$G$的的$Sylow\ 7-$子群$P$看做$A_8$的$Sylow\ 7-$子群，而$S_8$中的$Sylow\ 7-$子群个数为

$$\frac{P_8^7}{7\cdot6}=960$$

故$\left|N_{S_8}\left(P\right)\right|=\left|S_8\right|/960=42$，但$\left|N_G\left(P\right)\right|=96$，矛盾！故$G$不是单群.

综上所述，我们得到本文的最后结果

定理 9　在阶数≤700的有限群中，除去$\left|G\right|\in\left\{2,60,168,360,504,660\right\}$外，均不可能为单群.

第 3 章　本文的结束语与待研究的问题

本文利用 *Sylow* 定理、Burnside 定理和群作用等初等群论方法，得出了一系列判断群单群的条件，并利用这些结论对 700 阶以内的有限单群的情况作出了讨论. 推广了文献[1],[2],[3]，[4]中的结果，得出结论：

定理 在阶数 ≤ 700 的有限群中，除去 $|G|\in\{2,60,168,360,504,660\}$ 外，均不可能为单群.

对低阶有限单群的分布情况作了初步讨论，鉴于受限于初等方法，不能对更大范围内的所有有限群的单性进行讨论，回顾整篇文章，主要的工作在于讨论某些特殊的 Sylow 子群的个数，有时能直接通过整除判断，而有时要借助群作用的方法和一些置换群的性质，总体看来，是具体情况具体分析，方法不统一. 我们知道，任给有限群 G 及其 Sylow p-子群 P，$|G|=p^r m,(p,m)=1$，根据 Lagrange 定理，有

$$|G:P|=|G:N_G(P)|\cdot|N_G(P):P|$$

即

$$|G|=|G:N_G(P)|\cdot|N_G(P):P|\cdot|P|$$

其中

$$|G:N_G(P)|=n_p=1+kp\equiv 1(\bmod p)\text{，}\quad |P|=p^r$$

若令 $|N_G(P):P|=v$，则

$$|G|=(1+kp)\cdot v\cdot p^r$$

能否找到一个统一的、单群的上述三个参数 (k,v,r) 所满足的限制条件，那么对于更大阶数的有限群 G，我们就能比较方便的去判断其单性了，这是一个待研究的问题.

参考文献

[1] 孟道骥，陈良云，史毅茜，白瑞蒲. 抽象代数 I 代数学基础[M]. 北京:科学出版社，2010. 132.

[2] 徐明曜. 有限群导引[M]. 北京:科学出版社，2001. 80.

[3] 陶会强. 100以内的群的单性[J]. 天中学刊，2010，23(5)：9-11.

[4] Nicolas, D, Meyer. Transfer Theory and its applications to the study of Simple groups[D]. U.S.A:Southern Illinois University, 2010. 37-57.

[5] 张继平. 新世纪代数学(回顾与展望)[M]. 北京:北京大学出版社，2002.

[6] 韩士安，林磊. 近世代数[M]. 北京:科学出版社，2009.

[7] David, S. Dummit. Abstract Algebra [M]. U.S.A.:JOHN WILEY AND SONS INC, 2004.

附录 1

700 以内正整数质因数分解表

2 = 2	235 = 5*47	468 = 2*2*3*3*13
3 = 3	236 = 2*2*59	469 = 7*67
4 = 2*2	237 = 3*79	470 = 2*5*47
5 = 5	238 = 2*7*17	471 = 3*157
6 = 2*3	239 = 239	472 = 2*2*2*59
7 = 7	240 = 2*2*2*2*3*5	473 = 11*43
8 = 2*2*2	241 = 241	474 = 2*3*79
9 = 3*3	242 = 2*11*11	475 = 5*5*19
10 = 2*5	243 = 3*3*3*3*3	476 = 2*2*7*17
11 = 11	244 = 2*2*61	477 = 3*3*53
12 = 2*2*3	245 = 5*7*7	478 = 2*239
13 = 13	246 = 2*3*41	479 = 479
14 = 2*7	247 = 13*19	480 = 2*2*2*2*2*3*5
15 = 3*5	248 = 2*2*2*31	481 = 13*37
16 = 2*2*2*2	249 = 3*83	482 = 2*241
17 = 17	250 = 2*5*5*5	483 = 3*7*23
18 = 2*3*3	251 = 251	484 = 2*2*11*11
19 = 19	252 = 2*2*3*3*7	485 = 5*97
20 = 2*2*5	253 = 11*23	486 = 2*3*3*3*3*3
21 = 3*7	254 = 2*127	487 = 487
22 = 2*11	255 = 3*5*17	488 = 2*2*2*61
23 = 23	256 = 2*2*2*2*2*2*2*2	489 = 3*163
24 = 2*2*2*3	257 = 257	490 = 2*5*7*7
25 = 5*5	258 = 2*3*43	491 = 491
26 = 2*13	259 = 7*37	492 = 2*2*3*41
27 = 3*3*3	260 = 2*2*5*13	493 = 17*29
28 = 2*2*7	261 = 3*3*29	494 = 2*13*19
29 = 29	262 = 2*131	495 = 3*3*5*11
30 = 2*3*5	263 = 263	496 = 2*2*2*2*31
31 = 31	264 = 2*2*2*3*11	497 = 7*71
32 = 2*2*2*2*2	265 = 5*53	498 = 2*3*83
33 = 3*11	266 = 2*7*19	499 = 499
34 = 2*17	267 = 3*89	500 = 2*2*5*5*5
35 = 5*7	268 = 2*2*67	501 = 3*167
36 = 2*2*3*3	269 = 269	502 = 2*251
37 = 37	270 = 2*3*3*3*5	503 = 503
38 = 2*19	271 = 271	504 = 2*2*2*3*3*7
39 = 3*13	272 = 2*2*2*2*17	505 = 5*101

40 = 2*2*2*5	273 = 3*7*13	506 = 2*11*23
41 = 41	274 = 2*137	507 = 3*13*13
42 = 2*3*7	275 = 5*5*11	508 = 2*2*127
43 = 43	276 = 2*2*3*23	509 = 509
44 = 2*2*11	277 = 277	510 = 2*3*5*17
45 = 3*3*5	278 = 2*139	511 = 7*73
46 = 2*23	279 = 3*3*31	512 = 2*2*2*2*2*2*2*2*2
47 = 47	280 = 2*2*2*5*7	513 = 3*3*3*19
48 = 2*2*2*2*3	281 = 281	514 = 2*257
49 = 7*7	282 = 2*3*47	515 = 5*103
50 = 2*5*5	283 = 283	516 = 2*2*3*43
51 = 3*17	284 = 2*2*71	517 = 11*47
52 = 2*2*13	285 = 3*5*19	518 = 2*7*37
53 = 53	286 = 2*11*13	519 = 3*173
54 = 2*3*3*3	287 = 7*41	520 = 2*2*2*5*13
55 = 5*11	288 = 2*2*2*2*2*3*3	521 = 521
56 = 2*2*2*7	289 = 17*17	522 = 2*3*3*29
57 = 3*19	290 = 2*5*29	523 = 523
58 = 2*29	291 = 3*97	524 = 2*2*131
59 = 59	292 = 2*2*73	525 = 3*5*5*7
60 = 2*2*3*5	293 = 293	526 = 2*263
61 = 61	294 = 2*3*7*7	527 = 17*31
62 = 2*31	295 = 5*59	528 = 2*2*2*2*3*11
63 = 3*3*7	296 = 2*2*2*37	529 = 23*23
64 = 2*2*2*2*2*2	297 = 3*3*3*11	530 = 2*5*53
65 = 5*13	298 = 2*149	531 = 3*3*59
66 = 2*3*11	299 = 13*23	532 = 2*2*7*19
67 = 67	300 = 2*2*3*5*5	533 = 13*41
68 = 2*2*17	301 = 7*43	534 = 2*3*89
69 = 3*23	302 = 2*151	535 = 5*107
70 = 2*5*7	303 = 3*101	536 = 2*2*2*67
71 = 71	304 = 2*2*2*2*19	537 = 3*179
72 = 2*2*2*3*3	305 = 5*61	538 = 2*269
73 = 73	306 = 2*3*3*17	539 = 7*7*11
74 = 2*37	307 = 307	540 = 2*2*3*3*3*5
75 = 3*5*5	308 = 2*2*7*11	541 = 541
76 = 2*2*19	309 = 3*103	542 = 2*271
77 = 7*11	310 = 2*5*31	543 = 3*181
78 = 2*3*13	311 = 311	544 = 2*2*2*2*2*17
79 = 79	312 = 2*2*2*3*13	545 = 5*109
80 = 2*2*2*2*5	313 = 313	546 = 2*3*7*13
81 = 3*3*3*3	314 = 2*157	547 = 547

82 = 2*41	315 = 3*3*5*7	548 = 2*2*137
83 = 83	316 = 2*2*79	549 = 3*3*61
84 = 2*2*3*7	317 = 317	550 = 2*5*5*11
85 = 5*17	318 = 2*3*53	551 = 19*29
86 = 2*43	319 = 11*29	552 = 2*2*2*3*23
87 = 3*29	320 = 2*2*2*2*2*2*5	553 = 7*79
88 = 2*2*2*11	321 = 3*107	554 = 2*277
89 = 89	322 = 2*7*23	555 = 3*5*37
90 = 2*3*3*5	323 = 17*19	556 = 2*2*139
91 = 7*13	324 = 2*2*3*3*3*3	557 = 557
92 = 2*2*23	325 = 5*5*13	558 = 2*3*3*31
93 = 3*31	326 = 2*163	559 = 13*43
94 = 2*47	327 = 3*109	560 = 2*2*2*2*5*7
95 = 5*19	328 = 2*2*2*41	561 = 3*11*17
96 = 2*2*2*2*2*3	329 = 7*47	562 = 2*281
97 = 97	330 = 2*3*5*11	563 = 563
98 = 2*7*7	331 = 331	564 = 2*2*3*47
99 = 3*3*11	332 = 2*2*83	565 = 5*113
100 = 2*2*5*5	333 = 3*3*37	566 = 2*283
101 = 101	334 = 2*167	567 = 3*3*3*3*7
102 = 2*3*17	335 = 5*67	568 = 2*2*2*71
103 = 103	336 = 2*2*2*2*3*7	569 = 569
104 = 2*2*2*13	337 = 337	570 = 2*3*5*19
105 = 3*5*7	338 = 2*13*13	571 = 571
106 = 2*53	339 = 3*113	572 = 2*2*11*13
107 = 107	340 = 2*2*5*17	573 = 3*191
108 = 2*2*3*3*3	341 = 11*31	574 = 2*7*41
109 = 109	342 = 2*3*3*19	575 = 5*5*23
110 = 2*5*11	343 = 7*7*7	576 = 2*2*2*2*2*2*3*3
111 = 3*37	344 = 2*2*2*43	577 = 577
112 = 2*2*2*2*7	345 = 3*5*23	578 = 2*17*17
113 = 113	346 = 2*173	579 = 3*193
114 = 2*3*19	347 = 347	580 = 2*2*5*29
115 = 5*23	348 = 2*2*3*29	581 = 7*83
116 = 2*2*29	349 = 349	582 = 2*3*97
117 = 3*3*13	350 = 2*5*5*7	583 = 11*53
118 = 2*59	351 = 3*3*3*13	584 = 2*2*2*73
119 = 7*17	352 = 2*2*2*2*2*11	585 = 3*3*5*13
120 = 2*2*2*3*5	353 = 353	586 = 2*293
121 = 11*11	354 = 2*3*59	587 = 587
122 = 2*61	355 = 5*71	588 = 2*2*3*7*7
123 = 3*41	356 = 2*2*89	589 = 19*31

124 = 2*2*31	357 = 3*7*17	590 = 2*5*59
125 = 5*5*5	358 = 2*179	591 = 3*197
126 = 2*3*3*7	359 = 359	592 = 2*2*2*2*37
127 = 127	360 = 2*2*2*3*3*5	593 = 593
128 = 2*2*2*2*2*2*2	361 = 19*19	594 = 2*3*3*3*11
129 = 3*43	362 = 2*181	595 = 5*7*17
130 = 2*5*13	363 = 3*11*11	596 = 2*2*149
131 = 131	364 = 2*2*7*13	597 = 3*199
132 = 2*2*3*11	365 = 5*73	598 = 2*13*23
133 = 7*19	366 = 2*3*61	599 = 599
134 = 2*67	367 = 367	600 = 2*2*2*3*5*5
135 = 3*3*3*5	368 = 2*2*2*2*23	601 = 601
136 = 2*2*2*17	369 = 3*3*41	602 = 2*7*43
137 = 137	370 = 2*5*37	603 = 3*3*67
138 = 2*3*23	371 = 7*53	604 = 2*2*151
139 = 139	372 = 2*2*3*31	605 = 5*11*11
140 = 2*2*5*7	373 = 373	606 = 2*3*101
141 = 3*47	374 = 2*11*17	607 = 607
142 = 2*71	375 = 3*5*5*5	608 = 2*2*2*2*2*19
143 = 11*13	376 = 2*2*2*47	609 = 3*7*29
144 = 2*2*2*2*3*3	377 = 13*29	610 = 2*5*61
145 = 5*29	378 = 2*3*3*3*7	611 = 13*47
146 = 2*73	379 = 379	612 = 2*2*3*3*17
147 = 3*7*7	380 = 2*2*5*19	613 = 613
148 = 2*2*37	381 = 3*127	614 = 2*307
149 = 149	382 = 2*191	615 = 3*5*41
150 = 2*3*5*5	383 = 383	616 = 2*2*2*7*11
151 = 151	384 = 2*2*2*2*2*2*2*3	617 = 617
152 = 2*2*2*19	385 = 5*7*11	618 = 2*3*103
153 = 3*3*17	386 = 2*193	619 = 619
154 = 2*7*11	387 = 3*3*43	620 = 2*2*5*31
155 = 5*31	388 = 2*2*97	621 = 3*3*3*23
156 = 2*2*3*13	389 = 389	622 = 2*311
157 = 157	390 = 2*3*5*13	623 = 7*89
158 = 2*79	391 = 17*23	624 = 2*2*2*2*3*13
159 = 3*53	392 = 2*2*2*7*7	625 = 5*5*5*5
160 = 2*2*2*2*2*5	393 = 3*131	626 = 2*313
161 = 7*23	394 = 2*197	627 = 3*11*19
162 = 2*3*3*3*3	395 = 5*79	628 = 2*2*157
163 = 163	396 = 2*2*3*3*11	629 = 17*37
164 = 2*2*41	397 = 397	630 = 2*3*3*5*7
165 = 3*5*11	398 = 2*199	631 = 631

166 = 2*83	399 = 3*7*19	632 = 2*2*2*79
167 = 167	400 = 2*2*2*2*5*5	633 = 3*211
168 = 2*2*2*3*7	401 = 401	634 = 2*317
169 = 13*13	402 = 2*3*67	635 = 5*127
170 = 2*5*17	403 = 13*31	636 = 2*2*3*53
171 = 3*3*19	404 = 2*2*101	637 = 7*7*13
172 = 2*2*43	405 = 3*3*3*3*5	638 = 2*11*29
173 = 173	406 = 2*7*29	639 = 3*3*71
174 = 2*3*29	407 = 11*37	640 = 2*2*2*2*2*2*2*5
175 = 5*5*7	408 = 2*2*2*3*17	641 = 641
176 = 2*2*2*2*11	409 = 409	642 = 2*3*107
177 = 3*59	410 = 2*5*41	643 = 643
178 = 2*89	411 = 3*137	644 = 2*2*7*23
179 = 179	412 = 2*2*103	645 = 3*5*43
180 = 2*2*3*3*5	413 = 7*59	646 = 2*17*19
181 = 181	414 = 2*3*3*23	647 = 647
182 = 2*7*13	415 = 5*83	648 = 2*2*2*3*3*3*3
183 = 3*61	416 = 2*2*2*2*2*13	649 = 11*59
184 = 2*2*2*23	417 = 3*139	650 = 2*5*5*13
185 = 5*37	418 = 2*11*19	651 = 3*7*31
186 = 2*3*31	419 = 419	652 = 2*2*163
187 = 11*17	420 = 2*2*3*5*7	653 = 653
188 = 2*2*47	421 = 421	654 = 2*3*109
189 = 3*3*3*7	422 = 2*211	655 = 5*131
190 = 2*5*19	423 = 3*3*47	656 = 2*2*2*2*41
191 = 191	424 = 2*2*2*53	657 = 3*3*73
192 = 2*2*2*2*2*2*3	425 = 5*5*17	658 = 2*7*47
193 = 193	426 = 2*3*71	659 = 659
194 = 2*97	427 = 7*61	660 = 2*2*3*5*11
195 = 3*5*13	428 = 2*2*107	661 = 661
196 = 2*2*7*7	429 = 3*11*13	662 = 2*331
197 = 197	430 = 2*5*43	663 = 3*13*17
198 = 2*3*3*11	431 = 431	664 = 2*2*2*83
199 = 199	432 = 2*2*2*2*3*3*3	665 = 5*7*19
200 = 2*2*2*5*5	433 = 433	666 = 2*3*3*37
201 = 3*67	434 = 2*7*31	667 = 23*29
202 = 2*101	435 = 3*5*29	668 = 2*2*167
203 = 7*29	436 = 2*2*109	669 = 3*223
204 = 2*2*3*17	437 = 19*23	670 = 2*5*67
205 = 5*41	438 = 2*3*73	671 = 11*61
206 = 2*103	439 = 439	672 = 2*2*2*2*2*3*7
207 = 3*3*23	440 = 2*2*2*5*11	673 = 673

208 = 2*2*2*2*13	441 = 3*3*7*7	674 = 2*337
209 = 11*19	442 = 2*13*17	675 = 3*3*3*5*5
210 = 2*3*5*7	443 = 443	676 = 2*2*13*13
211 = 211	444 = 2*2*3*37	677 = 677
212 = 2*2*53	445 = 5*89	678 = 2*3*113
213 = 3*71	446 = 2*223	679 = 7*97
214 = 2*107	447 = 3*149	680 = 2*2*2*5*17
215 = 5*43	448 = 2*2*2*2*2*2*7	681 = 3*227
216 = 2*2*2*3*3*3	449 = 449	682 = 2*11*31
217 = 7*31	450 = 2*3*3*5*5	683 = 683
218 = 2*109	451 = 11*41	684 = 2*2*3*3*19
219 = 3*73	452 = 2*2*113	685 = 5*137
220 = 2*2*5*11	453 = 3*151	686 = 2*7*7*7
221 = 13*17	454 = 2*227	687 = 3*229
222 = 2*3*37	455 = 5*7*13	688 = 2*2*2*2*43
223 = 223	456 = 2*2*2*3*19	689 = 13*53
224 = 2*2*2*2*2*7	457 = 457	690 = 2*3*5*23
225 = 3*3*5*5	458 = 2*229	691 = 691
226 = 2*113	459 = 3*3*3*17	692 = 2*2*173
227 = 227	460 = 2*2*5*23	693 = 3*3*7*11
228 = 2*2*3*19	461 = 461	694 = 2*347
229 = 229	462 = 2*3*7*11	695 = 5*139
230 = 2*5*23	463 = 463	696 = 2*2*2*3*29
231 = 3*7*11	464 = 2*2*2*2*29	697 = 17*41
232 = 2*2*2*29	465 = 3*5*31	698 = 2*349
233 = 233	466 = 2*233	699 = 3*233
234 = 2*3*3*13	467 = 467	700 = 2*2*5*5*7

附录 2

700 以内满足各定理条件的正整数 VB 查找程序

```
Dim m, n, i, s, s2, i1, j, t As Integer

Private Sub Command1_Click()
t = 0
Cls
Print: Print: Print
Call aa1
End Sub

Private Sub Command2_Click(Index As Integer)
t = 0
Cls
Print: Print: Print
Call aa2_1
End Sub

Private Sub Command3_Click(Index As Integer)
t = 0
Cls
Print: Print: Print
Call aa3_1
End Sub

Private Sub Command4_Click()
t = 0
Cls
Print: Print: Print
Call aa4_1
End Sub

Private Sub Command5_Click()
t = 0
Cls
Print: Print: Print
Call aa5
End Sub

Private Sub Command7_Click()
t = 0
Cls
Print: Print: Print
Call aa7_1
End Sub

Private Sub Command6_Click()
t = 0
Cls
Print: Print: Print
Call aa6_1
End Sub

Private Sub Command8_Click()
```

```
Cls: Print: Print: Print: Print
Call te1
End Sub

Private Sub Form_Load()
Form1.Width = 70000
Form1.Height = 80000
End Sub

Private Sub aa7()
Print: Print
Print "小于 700 的质数,p 的 a 次方乘以 q 的 b 次方"
t = 0
Dim m As Integer
Print: Print
Print "p      a    q    b p 的 a 次方乘以 q 的 b 次方"
For i = 2 To 700
For j = 2 To 700
ss = 1
m = j
p = zhishu(m)
m = i
q = zhishu(m)
If p = True And q = True Then
For b = 1 To 10
For a = 1 To 10
ss = i ^ a * j ^ b
If ss > 700 Then
Exit For
Else
Print Format(i, "@@@"); Format(a, "@@"); Format(j, "@@@@"); Format(b, "@@"); Format(ss,
"@@@@"); " ";
End If
t = t + 1
If t Mod 10 = 0 Then Print
If t = 320 Then
t = 0
For time1 = 1 To 600000000: Next time1: Cls: Print: Print: Print: Print
End If
Next a
Next b
End If
p = False
q = False
Next j
Next i
End Sub

Private Sub aa1()
Print: Print
Print "小于 700 的质数,P 的 N 次方"

Dim m As Integer
Print: Print
Print "p      n    p 的 n 次方"
For j = 2 To 700
```

```
ss = 1
m = j
p = zhishu(m)
For k = 1 To 10
ss = j ^ k
If ss > 700 Then Exit For

If p = True Then
Print Format(j, "@@@@@@"); Format(k, "@@"); Format(ss, "@@@@");
t = t + 1
If t Mod 10 = 0 Then Print
End If
Next k
p = False
Next j
End Sub

Private Sub aa6()
t = 0
Dim m As Integer
Print "由 3 个质数相乘在 700 以内的数"
Print "p    q    r    pqr"
For i = 2 To 700
m = i
p = zhishu(m)
For j = 2 To 700
m = j
q = zhishu(m)
For k = 2 To 700
m = k
r = zhishu(m)
ss = i * j * k
If ss > 700 Then Exit For
If p = True And q = True And r = True Then
Print Format(i, "@@@"); Format(j, "@@@"); Format(k, "@@@"); Format(ss, "@@@@"); "
";
t = t + 1
If t Mod 12 = 0 Then Print
If t = 420 Then
t = 0
For time1 = 1 To 600000000: Next time1: Cls: Print: Print: Print: Print
End If
End If
Next k
Next j
Next i
End Sub

Private Sub aa5()
Print: Print
Print "2n（n 为奇数）"
Print "n    2n"
t = 0
For i = 1 To 349 Step 2
Print Format(i, "@@@@@@@"); Format(i * 2, "@@@@"); " ";
t = t + 1
```

```
If t Mod 10 = 0 Then Print
Next i
End Sub


Private Sub aa2()
Print: Print
Print "两个小于 700 的质数以 pq 的方式相乘，积小于 700"
Dim m As Integer
Print "p    q    pq"
t = 0
For i = 2 To 700
m = i
p = zhishu(m)
If p <> True Then GoTo inext
For j = 2 To 700
m = j
q = zhishu(m)
If q <> True Then GoTo jnext
ss = i * j
If ss > 700 Then
Exit For
Else
Print Format(i, "@@@@"); Format(j, "@@@@"); Format(ss, "@@@@"); " ";
End If
t = t + 1
If t Mod 16 = 0 Then Print
If t = 640 Then
t = 0
For time1 = 1 To 600000000: Next time1: Cls: Print: Print: Print: Print
End If
jnext:
Next j
inext:
Next i
End Sub

Private Sub aa3()
Print: Print
Print "小于 700 的质数,p 的 n 次方乘以 q"
t = 0
Dim m As Integer
For i = 2 To 700
m = i
p = zhishu(m)
For j = 2 To 700
m = j
q = zhishu(m)
For n = 1 To 10
ss = i ^ n * j
If ss > 700 Then Exit For
If p = True And q = True Then
Print Format(i, "@@@@@@"); Format(n, "@@"); Format(j, "@@@@"); Format(ss,
"@@@@");
t = t + 1
If t Mod 12 = 0 Then Print
```

```
End If

' If t = 640 Then
' t = 0
' For time1 = 1 To 600000000: Next time1: Cls: Print: Print: Print: Print
' End If
Next n
Next j
Next i

End Sub

Private Sub aa4()
  Dim m As Integer
Print: Print
Print "两个小于 700 的质数以 ppqq 的方式相乘，积小于 700"
Print "p    q    ppqq"
For i = 2 To 700
For j = 2 To 700
m = j
p = zhishu(m)
m = i
q = zhishu(m)

ss = i * i * j * j

If p = True And q = True And ss <= 700 Then
Print Format(i, "@@@@"); Format(j, "@@@@"); Format(ss, "@@@@");
t = t + 1
If t Mod 6 = 0 Then Print

End If

p = False
q = False
Next j
Next i
End Sub

Private Function zhishu(m As Integer) As Boolean
s = 1
Do
s = s + 1
Loop While s <= Int(m / 2) And m Mod s <> 0
If s > Int(m / 2) Then
zhishu = True
Else
zhishu = False
End If
End Function

Private Sub te1()
i = 123
For j = 1 To 200: Print Format(i, "@@@@@");: Next j
End Sub
```

```
Private Sub aa6_1()
t = 0
Dim m As Integer
Print "由 3 个质数相乘在 700 以内的数(p≤q≤r)        过程名：aa6_1"
Print "p    q    r    pqr"
For i = 2 To 700
m = i
p = zhishu(m)
For j = i To 700
m = j
q = zhishu(m)
For k = j To 700
m = k
r = zhishu(m)
ss = i * j * k
If ss > 700 Then Exit For
If p = True And q = True And r = True Then
Print Format(i, "@@@@"); Format(j, "@@@@"); Format(k, "@@@@"); Format(ss,
"@@@@"); "    ";
t = t + 1
If t Mod 11 = 0 Then Print
If t = 420 Then
t = 0
For time1 = 1 To 600000000: Next time1: Cls: Print: Print: Print: Print
End If
End If
Next k
Next j
Next i
End Sub

Private Sub aa4_1()
  Dim m As Integer
Print: Print
Print "两个小于 700 的质数以 ppqq 的方式相乘，积小于 700.   (p≤q)"
Print "p    q    ppqq"
For i = 2 To 700
For j = i To 700
m = j
p = zhishu(m)
m = i
q = zhishu(m)

ss = i * i * j * j

If p = True And q = True And ss <= 700 Then
Print Format(i, "@@@@"); Format(j, "@@@@"); Format(ss, "@@@@");
t = t + 1
If t Mod 6 = 0 Then Print

End If

p = False
q = False
Next j
Next i
```

```
End Sub

Private Sub aa2_1()
Print: Print
Print "两个小于 700 的质数以 pq 的方式相乘，积小于 700.   p≤q"
Dim m As Integer
Print "p    q    pq"
t = 0
For i = 2 To 700
m = i
p = zhishu(m)
If p <> True Then GoTo inext
For j = i To 700
m = j
q = zhishu(m)
If q <> True Then GoTo jnext
ss = i * j
If ss > 700 Then
Exit For
Else
Print Format(i, "@@@@"); Format(j, "@@@@"); Format(ss, "@@@@"); " ";
End If
t = t + 1
If t Mod 16 = 0 Then Print
If t = 640 Then
t = 0
For time1 = 1 To 600000000: Next time1: Cls: Print: Print: Print: Print
End If
jnext:
Next j
inext:
Next i
End Sub


Private Sub aa3_1()
Print: Print
Print "小于 700 的质数,p 的 n 次方乘以 q。    p≤q"
t = 0
Dim m As Integer
For i = 2 To 700
m = i
p = zhishu(m)
For j = i To 700
m = j
q = zhishu(m)
For n = 1 To 10
ss = i ^ n * j
If ss > 700 Then Exit For
If p = True And q = True Then
Print Format(i, "@@@@@@"); Format(n, "@@"); Format(j, "@@@@"); Format(ss,
"@@@@");
t = t + 1
If t Mod 12 = 0 Then Print
End If
```

```
' If t = 640 Then
' t = 0
' For time1 = 1 To 600000000: Next time1: Cls: Print: Print: Print: Print
' End If
Next n
Next j
Next i

End Sub


Private Sub aa7_1()
Print: Print
Print "小于 700 的质数,p 的 a 次方乘以 q 的 b 次方。p≤q"
t = 0
Dim m As Integer
Print "p     a    q    b p 的 a 次方乘以 q 的 b 次方"
For i = 2 To 700
For j = i To 700
ss = 1
m = j
p = zhishu(m)
m = i
q = zhishu(m)
If p = True And q = True Then
For b = 1 To 10
For a = 1 To 10
ss = i ^ a * j ^ b
If ss > 700 Then
Exit For
Else
Print Format(i, "@@@"); Format(a, "@@"); Format(j, "@@@@"); Format(b, "@@"); Format(ss,
"@@@@"); " ";
End If
t = t + 1
If t Mod 12 = 0 Then Print
If t = 480 Then
t = 0
For time1 = 1 To 600000000: Next time1: Cls: Print: Print: Print: Print
End If
Next a
Next b
End If
p = False
q = False
Next j
Next i
End Sub
```

.